四、1. 已知向量组：，，；：，，，证明向量组能由向量组线性表示，但向量组不能由向量组线性表示

证：看和是否存在解：

行变换

但不能由线性表示

四、2. 已知向量组：，；：，，，证明向量组与向量组等价

证：行变换

所以和的列空间可以互相代替，即与等价

四、3.（1）判订向量组，，是线性相关还是线性无关

解： 存在非零解 ，，线性相关

四、3.（2）判订向量组，，是线性相关还是线性无关

解： 不存在非零解 ，，线性无关

四、4. 问取什么值时，向量组，，线性相关？

解：，，线性相关 存在非零解

四、5. 设矩阵，这里，为维列向量。证明（1）（2）当，线性相关时，

证1：的每一列都可由，线性表示，故

证2：的每一列都可由线性表示，故

四、6. 设，线性无关，，线性相关，求向量用，线性表示的表示式

解：

四、7. 设，线性相关，，也线性相关，问，是否一定线性相关？试举例说明之

解：未必。例如，，，，则，，二者线性无关。

四、8.（1）举例说明命题是错误的：若向量组，，，是线性相关的，则可由，，线性表示。

反例：，，， 但不可由，线性表示

四、8.（2）举例说明命题是错误的：若有不全为零的数，，，使成立，则，，，线性相关，，，，亦线性相关。

反例：

即，，，线性无关，，，，也线性无关

四、8.（3）举例说明命题是错误的：若只有当，，，全为零时等式才能成立，则，，，线性无关，，，，亦线性无关。

反例：

其中，，线性相关，，也线性相关

四、8.（4）举例说明命题是错误的：若，，，线性相关，，，，亦线性相关，则有不全为零的数，，，使同时成立。

反例：

不存在，使得成立

四、9. 设，，，，证明向量组，，，线性相关。

证：，即，，，线性相关

四、10. 设，，，，且向量组，，，线性无关，证明向量组，，，线性无关。

证：，

即，，，线性无关

四、11.（1）设向量组，，线性无关，判断向量组，，的线性相关性：

，，

解：

且存在 ，，线性无关

四、11.（2）设向量组，，线性无关，判断向量组，，的线性相关性：

，，

解：

且存在 ，，线性无关

四、11.（3）设向量组，，线性无关，判断向量组，，的线性相关性：

，，

解：

且不存在 存在非零解 ，，线性相关

四、12. 设向量组B：，，能由向量组A：，，线性表示为，其中为矩阵，且向量组A线性无关。证明向量组B线性无关的充分必要条件是矩阵的秩

解：B线性无关：其中，即

四、13.（1）求向量组，，的秩，并求一个最大无关组

解：行变换 最大无关组：，

四、13.（2）求向量组，，的秩，并求一个最大无关组

解：行变换 最大无关组：，

四、14.（1）利用初等变换求矩阵的列向量组的一个最大无关组，并把其余列向量用最大无关组线性表示

解：列组合

行变换：

则1、2、3列是最大无关组。

四、14.（2）利用初等变换求矩阵的列向量组的一个最大无关组，并把其余列向量用最大无关组线性表示

解：解：列组合

行变换：

则1、2、3列是最大无关组。

，且

四、15. 设向量组，，，的秩为2，求，

解：，线性无关，秩已经是2，则 ， 必可由 ， 线性表示：

四、16. 设向量组A：，；向量组B：，，；向量组C：，，的秩为，，求向量组D：，，的秩。

解：，线性无关。必可由，线性表示。，，线性无关。

四、17. 设维空间中有维向量组A：，，，，证明它们线性无关的充分必要条件是：任一维向量都可由它们线性表示。

证：，，，线性无关 其中，，，全非零。

即，其中

四、18. 设向量组，，，线性相关，且，证明存在某个向量（），使能由，，线性表示。

证：，，，线性相关其中，，，不全为零，且，

则不成立，即不可单为非零。

则必存在使得

四、19. 设，证明向量组，，，与向量组，，，等价。

证：或中，

，即可逆，

即，因此与等价。

四、20.（1）已知3阶矩阵与3维列向量满足，且向量组，，线性无关。记，，，求3阶矩阵，使

解：

四、20.（2）已知3阶矩阵与3维列向量满足，且向量组，，线性无关。求

解：若，则存在，，，，线性相关。说明假设错误。即

四、21.（1）求线性方程组的基础解系

解：为基础解系

四、21.（2）求线性方程组的基础解系

解：为基础解系

四、21.（3）求线性方程组的基础解系

解：，，，全部视为自由变量，则基础解系为，，，

四、22. 设，求一个矩阵，使，且

解：的基础解系为与

让，则且

四、23. 求一个齐次线性方程组，使它的基础解系为，

解：可作为方程组的系数

即

四、24. 设四元齐次线性方程组I：，II：，（1）求方程组I与II的基础解系。（2）求I与II的公共解。

解：I：为其基础解系

II：为其基础解系

I & II：为公共基础解系

四、25. 设阶矩阵满足，为阶单位矩阵，证明

解：其中的列在的解空间之内，则

且的列在的列空间和的列空间之内，即

则

四、26. 设为阶矩阵（），为的伴随矩阵，证明

解：时，存在，其中满秩，且，所以也满秩，故.

时，有1行和1列是其它行列的线性组合，只有去除此行列的阶子式非零，所以.

时，有2行和2列是其它行列的线性组合，即的阶子式都为零，则，所以.

四、27.（1）求非齐次线性方程组的一个解及对应的齐次线性方程组的基础解系

解：，基础解系为

四、27.（2）求非齐次线性方程组的一个解及对应的齐次线性方程组的基础解系

解：

基础解系为

四、28. 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为3，已知，，是它的三个解向量，且，，求该方程组的通解。

解：求零解为零解 通解

四、29. 设有向量组A：，，及向量，问，为何值时，（1）向量不能由向量组A线性表示。（2）向量能由向量组A线性表示，且表示式唯一。（3）向量能由向量组A线性表示，且表示式不唯一，并求一般表示式。

解：行变换，

即在时有唯一解，在时无解，

在有无穷多解：

四、30. 设，，，（，），证明三直线相交于一点的充分必要条件为：向量组，线性无关，且向量组，，线性相关。

解：三直线相交于一点，即存在使得，且三条线不可斜率相同

线性相关，线性无关

四、31. 设矩阵，其中，，线性无关，，向量，  
求方程的通解。

解： 特解，零解

通解

四、32. 设是非齐次线性方程组的一个解，，，是对应的齐次线性方程组的一个基础解系。  
证明（1），，，线性无关。（2）证明，，，线性无关

解：，，是的一个基础解系，则，，线性无关，且，

但是，即，，，线性无关。（1）

列变换，，，，线性无关，说明即，，，也线性无关。（2）

四、33. 设，，，是非齐次线性方程组的个解，，，为实数，满足。

证明也是它的解。

解：

即是的解

四、34. 设非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为，是它的个线性无关的解（由题32知它确有个线性无关的解）。试证它的任意解可表示为（其中）

解：系数矩阵秩为，则的零空间为维，且，其中

列变换，即线性无关，

所以的零空间为，并把的特解设为，

则通解，

其中为任意数。

设，则，其中

四、35. 设，，问，是不是向量空间？为什么？

解：中是空间

中不包含零点不是空间

四、36. 由，所生成的向量空间记作，由，所生成的向量空间记作，试证明

证：

四、37. 验证，，为的一个基，并把，用这个基线性表示。

证：

且

四、38. 已知的两个基为，，及，，，

（1）求由基，，到基，，的过度矩阵

（2）设向量在前一基中的坐标为，求它在后一基中的坐标

解1：

解2：